

Les Suites

1

Suites arithmétiques :

$$U_n = U_0 + nr$$

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

$$U_{n+1} = U_n + r$$

Suites géométriques :

$$U_n = U_0 \times q^n$$

$$U_n = U_1 \times q^{n-1}$$

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

$$U_{n+1} = q \times U_n$$

La somme des premiers termes :

$$S_n = \text{nb de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Variation :

$$\text{Si } U_n \leq U_{n+1} \longrightarrow \text{croissante} \nearrow$$

$$\text{Si } U_n \geq U_{n+1} \longrightarrow \text{décroissante} \searrow$$

Méthodes de variation :

$$\rightarrow U_n \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} U_{n+1} \longrightarrow \text{comparaison via propriétés}$$

$$\rightarrow U_{n+1} - U_n \longrightarrow \text{Si } "-" \Rightarrow \nearrow \quad \text{Si } "+" \Rightarrow \searrow$$

$$\rightarrow U_n = f(n) \longrightarrow \text{étude du signe de } f(n)$$

$$\rightarrow \text{Si } U_n > 0 \longrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} 1 \text{ ou } U_{n+1} \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} U_n$$

$$\rightarrow \text{Si } U_{n+1} \longrightarrow \text{démonstration par récurrence}$$

Les suites de référence de limites

Les suites

Ensemble de définition

Limite

k_n	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}$	$\rightarrow +\infty$
k_n^p	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}, p \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow +\infty$
$k\sqrt{n}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}$	$\rightarrow +\infty$
$k e^n$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}, e^n = e^x$	$\rightarrow +\infty$
$-k_n$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}$	$\rightarrow -\infty$
$-k_n^p$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}, p \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow -\infty$
$-k\sqrt{n}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}$	$\rightarrow -\infty$
$-k e^n$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}, e^n = e^x$	$\rightarrow -\infty$
$\frac{k}{n}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}$	$\rightarrow 0$
$\frac{k}{n^p}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}, p \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow 0$
$\frac{k}{\sqrt{n}}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}$	$\rightarrow 0$
$\frac{k}{e^n}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}, e^n = e^x$	$\rightarrow 0$
$\frac{k}{e^n}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^{*+}, e^n = e^x$	$\rightarrow 0$

Programme python seuil

```

def seuil(a):
    n = 0
    u = 2
    while u <= a:
        n = n + 1
        u = 4 * u
    return u

```

a et le nb qu'on veut atteindre
 nombre de départ ($U_0, u, 2$)
 le résultat de ($U_0, u, 2$)
 tant qu'on a pas le résultat
 nombre de fois
 opération de U_n
 affiche le résultat

En définitions

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \rightarrow \forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \Rightarrow U_n > A$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty \rightarrow \forall A \in \mathbb{R}^{*-}, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \Rightarrow U_n < A$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \longrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow u_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$

Les suites sans limites :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \rightarrow \begin{cases} \text{pas de limite} \longrightarrow (-1)^n, \cos n \} (n) \\ \text{limite infinie} \end{cases}$

diverge ou divergente

F.I. = forme indéterminée
 $\pm \infty = +\infty$ ou $-\infty$

Limites d'une somme :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limites d'un produit :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$l \neq 0$	$l \neq 0$	$l \neq 0$	$\pm \infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$	$\pm \infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n =$	$l l'$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$	F.I.*

régles de signe

Limites d'un quotient :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	l	$\pm \infty$	$+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	0	$\pm \infty$	l	$+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	F.I.*	F.I.*

Formes Indéterminées ? : Les astuces ↴

"Astuce 1": on factorise par le terme prépondérant

exemple: $U_n = n^2 - 5n + 2 \rightarrow n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$

"Astuce 1 bis": on factorise par le terme prépondérant le numérateur et le dénominateur

exemple: $U_n = \frac{-7n^2}{1-n} \rightarrow \frac{n^2(-7)}{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}$

"Astuce 2": On multiplie et on divise par l'exposant dit "conjugué"

exemple: $U_n = \sqrt{n+10} - \sqrt{n} \rightarrow \frac{(\sqrt{n+10} - \sqrt{n}) \times (\sqrt{n+10} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n}}$

Le théorème de comparaison:

Limite infinie positif:

Il faut que $\begin{cases} \text{à partir d'un rang, } U_n > v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{cases}$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

Limite infinie négatif:

Il faut que $\begin{cases} \text{à partir d'un rang, } U_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases}$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

Le théorème des gendarmes:

Limite finie:

Il faut que $\rightarrow$ à partir d'un rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Démonstration au programme:

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Montrons que $\forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n > A$

Soit $A \in \mathbb{R}^{*+}$

- D'après la condition 1, $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \Rightarrow u_n > v_n$
- D'après 2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, donc, $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \Rightarrow v_n > A$

Il suffit de choisir N le plus grand entier entre N_1 et N_2
 $N_{\text{max}} = (N_1, N_2)$

Ainsi, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n > v_n > A$

Ainsi, $\forall A \in \mathbb{R}^{*+} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n > A$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$